Matematika szeminárium

Vezeti: Nyíri Dávid

Mértékelmélet és Valószínűség számítás

Motiváció

A szeminárium fő témája a mérték és valószínűség közötti szerves kapcsolat. A félév során a matematika felszínéről tekinthetünk a mélyére, nagy horderejű tételek, absztrakt definíciók, valamint egy új alapokra épülő analízis felé. A mértékelmélet a matematika avantgárd irányzatának tekinthető. Lebesgue eredményei az 1930-as években lehetővé tették a Fourier- sorok elméletének tökéletesítését, a kvantummechanika matematikai hátterének egzakt leírását, valamint a valószínűség addig ellentmondásos fogalmának definícióját. A szeminárium a Kolmogorov-féle axiómák segítségével tárgyalja majd a valószínűség számítást, valamint ennek előfeltételeként a mértékelméleti alapokat, ezek között is elsősorban a mérték szerinti integrálást. A mértékelmélet halmazok méretével, „mértékével", valamint ezen halmazok közti leképezésekkel, függvényekkel, ezek integrálásával foglalkozó tudományág. Lebesgue forradalmi gondolataival ezen alapokra helyezte új integrálfogalmát, mely az addig használatos Riemann-integrál számos problémájára megoldást nyújtott. A Lebesgue-integrál más megközelítésből nyúlt hozzá a függvénygörbe alatti terület kiszámításához, mint elődei. A szeminárium során megismerkedünk a fontosabb tételekkel, konvergencia fogalmakkal, valamint magával az integrállal is személyesen.

A valószínűség számítás alapfogalmai a mérték fogalmára épülnek. Szó esik majd a tervek szerint ezen alapfogalmakról, valamint a Nagy Számok törvényeiről. A cél a Nagy Számok Erős Törvénye, teljes pompájában, nehéz és technikás bizonyítással, ám óriási szemléletformáló erővel, tele nagyszerű ötletekkel.

Tematika

Mértékelméleti alapok

A σ-algebra fogalma, a Borel σ-algebra Mérték fogalma, mértékek konstruálása, mérték teljessé tétele. Példák mértékekre (Lebesgue mérték, Lebesgue–Stieltjes mérték, mint valószínűségi mérték, Dirac mérték).

Mérhető függvények, integrál

Mérhető függvény fogalma, mérhető függvények konvergenciája (pontonkénti, mértékbeni). Mérték szerinti integrál. Lebesgue-integrál, Lebesgue–Stieltjes integrál. Fatou-lemma, Beppo Levi tétel, Lebesgue- féle dominált konvergencia tétel.

Valószínűség számítási alapok

Események, események σ- algebrájaesemény valószínűsége, a valószínűségi mérték fogalma. Valószínűségi változó, a változó várható értéke, szórása, n. momentuma, ezek kapcsolata a mérték szerinti integrállal. A várható érték tulajdonságai. Markov és Csebisev tételei, Borel–Cantelli lemmák. Nagy Számok Erős Törvénye. Nagy Számok Bernoulli, illetve Gyenge törvénye. Az NSzET törvény teljes bizonyítása. Kolmogorov- egyenlőtlenség, Kronecker-lemma, a tétel teljes bizonyítása összegezhető szórásnégyzetekkel, majd a Kronecker-lemma felhasználásával.